



TITLE:

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮における螺旋超流動の不安定性 (オイラー方程式の数理: 渦運動と音波150年)

AUTHOR(S):

竹内, 宏光

CITATION:

竹内, 宏光. 原子気体ボース・アインシュタイン凝縮における螺旋超流動の不安定性 (オイラー方程式の数理: 渦運動と音波150年). 数理解析研究所講究録 2010, 1697: 121-135

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141667>

RIGHT:

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮に おける螺旋超流動の不安定性

竹内 宏光

Hiromitsu Takeuchi

大阪市立大学大学院 理学研究科

Department of Physics, Osaka City University

原子気体ボース・アインシュタイン凝縮において、螺旋運動する超流体の不安定性を議論する。凝縮体に直線状の量子渦が存在するとき、この不安定性によりケルビン波を励起、増幅させることができる。この現象を利用することで、ケルビン波の分散関係、量子渦の再結合、量子乱流が原子気体ボース・アインシュタイン凝縮で可能であることを示す。

1 螺旋超流動

水の入ったバケツを回転させると、やがて中央に渦を作って水はバケツと同じ速度で一様に回転するようになる。これは水と容器との間の相對運動により摩擦が生じ、水が壁に引きずられるからである。ところが超流体の場合、壁に引きずられずに相對運動を繼續することができる（超流動状態）。このような超流動状態の安定性は、壁などの環境体と一緒に運動する座標系における超流体の熱力学的エネルギー E を用いて説明される [1]。はじめ超流体は実験室系で静止していたとする。実験室系において並進速度 \mathbf{V} 、角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で運動する環境体を考えよう。このとき、環境体と一緒に運動する座標系でのエネルギー E は、実験室系におけるエネルギー E_0 と運動量 \mathbf{P} 、角運動量 \mathbf{L} を用いて、

$$E(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}) = E_0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} \quad (1)$$

で表される。超流動状態は熱力学エネルギー (1) の極小で実現される。超流動状態に関するこの種の熱力学的議論はこれまで多く議論されてきたが、並進運動だけの場合 ($\mathbf{V} \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\Omega} = 0$)、もしくは、回転運動だけの場合 ($\mathbf{V} = 0$ かつ $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) に限られていた [2]。前者は、一様系における超流動の (ランダウ) 臨界速度の議論で用いられるのが有名である。後者は、異常慣性モーメントの議論や量子渦格子形成の議論などでよく用いられる。しかし、両者を考慮した一般的な場合 ($\mathbf{V} \neq 0$ and $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) の超流動状態も原理的には可能であり、そこでは超流動に関する新しい現象が期待される。

この研究では、原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) に量子渦が存在するときの螺旋超流動状態 ($\mathbf{V} \parallel \boldsymbol{\Omega}$) の安定性について議論する [3]。 $V = |\mathbf{V}|$ と $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ がある範囲内 (安定領域) の値をとる場合、螺旋超流動は安定に存在することが可能であることが示される。また、安定領域からはずして超流動状態を不安定にすることにより、ケルビン波 (量子渦糸が螺旋状に変形する波) [4] を励起、増幅させることができる。これはケルビン波の量子 kelvon によるランダウ不安定性と解釈することができ、超流動ヘリウムの系で流体力学的不安定性と解釈されてきた Donnelly-Glaberson (DG) 不安定性 [5, 6] の微視的な解釈を与えるものである。原子気体 BEC において、DG 不安定性を利用してケルビン波の分散関係、量子渦の再結合 [7]、量子乱流 [8, 9] の観測が可能であることを示す。

2 DG 不安定性

この節では、超流動ヘリウムにおいて議論されてきた DG 不安定性を、二流体模型の渦糸近似 [6] を用いて説明する。 z 軸に沿った一本の直線渦糸が、半径 ϵ 、波数 k を持ち、角振動数 $\omega \hat{\mathbf{z}}$ で回転する螺旋状に変形 (ケルビン波) した状況を考える。このとき、渦糸上の点 \mathbf{s} は、変数 ξ を用いて $\mathbf{s}(\xi, t) = \epsilon \cos(kz(\xi) - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + \epsilon \sin(kz(\xi) - \omega t) \hat{\mathbf{y}} + z(\xi) \hat{\mathbf{z}}$ と表される。渦間の相互作用を無視する局所誘導近似 [6] の下では、渦糸の運動方程式は $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}_i + \alpha \mathbf{s}^1 \times (\mathbf{v}_N - \mathbf{v}_i)$ と書かれる。ここで $\mathbf{s}^n = d^n \mathbf{s} / d\xi^n$ 、相互摩擦係数 $\alpha(T) \geq 0$ 、常流体の速度 \mathbf{v}_N 、自己誘導速度 \mathbf{v}_i を用いた。振幅 ϵ が十分小さいとき、自己誘導速度は線形化されて、

$\mathbf{v}_i = \beta \mathbf{s}^1 \times \mathbf{s}^2 \approx \beta k^2 \epsilon \sin(kz(\xi) - \omega t) \hat{\mathbf{x}} - \beta k^2 \epsilon \cos(kz(\xi) - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$ と書かれる。ここで、 $\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \ln(\frac{1}{ka})$ を用い、 κ と a は循環量子と渦芯の有効半径である。絶対零度 $T = 0$ で常流体成分が存在しない場合、常流体と超流体の間の相互摩擦が消失し $\alpha(T = 0) = 0$ となる。このとき、ケルビン波の角振動数は $\omega = \omega_0 \equiv \beta k^2$ である。有限温度で常流体が速度 $\mathbf{v}_N = \Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} + V \hat{\mathbf{z}}$ ($\Omega > 0$, $V > 0$) で流れている状況を考えよう。この場合渦糸の初期のダイナミクスは、式

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\alpha(\omega_0 + \Omega - kV)\epsilon \quad (2)$$

によって記述される。波数 k を持つ螺旋の半径 ϵ は、 $\omega_0 + \Omega - kV < 0$ のとき時間と共に増加し、 $\omega_0 + \Omega - kV > 0$ のとき小さくなる。したがって、直線渦の状態は速度 V が DG 臨界速度

$$V_{\text{DG}} = \min_k \left(\frac{\omega_0 + \Omega}{k} \right) \quad (3)$$

上回ったときに不安定となる。この不安定性は、渦糸の局所的な形状によって引き起こされるため、渦格子や渦糸タングル状態のような複雑な状況においても、他の全ての渦によって引き起こされる超流動速度を足し合わせた速度場を考慮することによって、同様に議論することができる [10, 11]。したがって、DG 不安定性は、有限温度の超流動 ^4He と $^3\text{He-B}$ の系における量子渦糸のダイナミクスで重要な役割を演じる。

3 DG 不安定性の熱力学的解釈

上の渦糸モデルによる議論で不明瞭であった熱力学的観点から DG 不安定性を考察してみよう。前節における速度 $\mathbf{v}_N = \Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} + V \hat{\mathbf{z}}$ で運動する常流体を環境体と見なしたとき、式 (1) により、超流体に対する熱力学的エネルギーは、 $E(V, \Omega) = E_0 - VP_z - \Omega L_z$ と書かれる。ここで、 P_z と L_z は、それぞれ z 軸沿いの超流体の運動量と角運動量である。DG 不安定性は熱力学的観点から以下のようなことが起きていると予想される。ある回転振動数 Ω の下、並進速度 V が DG 臨界速度 V_{DG} より小さいとき、直線渦を持つ安定な状態は熱力学的エネルギー $E(V, \Omega)$ の極小に位置するため安定であ

る．ところが、 $V > V_{DG}$ になると、その極小が消失することにより直線渦を持つ状態が不安定となり、ケルビン波が増幅される．超流体におけるこの種の熱力学的不安定性の議論は、ランダウ不安定性の議論によって微視的に解釈することができる．つまり臨界速度を超えたとき、負のエネルギーを持つ kelvon が次々に励起され、エネルギー E を下げるためにケルビン波の増幅を引き起こすのである．

ところが、超流動ヘリウムの系における渦糸近似では、ケルビン波の素励起としての描像は不明瞭である．それとは対照的に、原子気体 BEC の系では量子渦の芯の構造が正確に記述され、ケルビン波の素励起としての微視的な描像を明確に捉えることができる．これにより、DG 不安定性がケルビン波のランダウ不安定性によって引き起こされていることが明らかになる．

4 原子気体 BEC における螺旋超流動

z 軸に関して軸対称な調和ポテンシャル $V_t(\mathbf{r}) = \frac{M}{2}(\omega_\perp^2 \rho^2 + \omega_\parallel^2 z^2)$ に束縛された凝縮体を考えよう．ここで、原子の質量 M と円筒座標 (ρ, θ, z) を導入した．簡単のため $\omega_\parallel \ll \omega_\perp$ 、 $V_t(\mathbf{r}) \approx \frac{M}{2}\omega_\perp^2 \rho^2$ の場合を考え、近似的に z 軸に関して一様な系とみなし、 z 方向に関して周期的な系として取り扱うこととする．十分低温においては、原子気体の熱力学的エネルギーは複素秩序変数（または巨視的波動関数） Ψ によって支配される．凝縮体の粒子数を $N = \int d\mathbf{r} |\Psi|^2$ 、化学ポテンシャルを μ とすると、螺旋運動する座標系から見た凝縮体に対する熱力学エネルギーは

$$K(\Psi, V, \Omega) = K_0(\Psi) - VP_z(\Psi) - \Omega L_z(\Psi), \quad (4)$$

と書かれる．ここで、 $K_0(\Psi) = \int d\mathbf{r} [\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 + (\frac{1}{2}\rho^2|\Psi|^2 + \frac{1}{2}g|\Psi|^2 - \mu)|\Psi|^2]$ 、 $P_z(\Psi) = \int d\mathbf{r} (\Psi^* \hat{p}_z \Psi - \Psi \hat{p}_z \Psi^*)$ 、 $L_z(\Psi) = \int d\mathbf{r} (\Psi^* \hat{l}_z \Psi - \Psi \hat{l}_z \Psi^*)$ を用い、 $\hat{p}_z = -i\nabla_z$ 、 $\hat{l}_z = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_z$ である．また、原子間相互作用は g で特徴付けられ、 s 波散乱長を用いて $g = 4\pi a N / b_\perp > 0$ と書かれる．ここで、エネルギー、長さ、時間のスケールを、それぞれ $\hbar\omega_\perp$ 、 $b_\perp = \sqrt{\hbar/M\omega_\perp}$ 、 ω_\perp^{-1} でとり、系の z 軸方向の周期 L を用いて巨視的波動関数が $\int d\rho \rho \int d\theta \int_{-L/2}^{L/2} dz |\Psi(\mathbf{r})|^2 = 1$ を満たすように規格化しよう．これと 熱力

学的エネルギー (4) より、 Ψ に関して時間に依存した Gross-Pitaevskii (GP) 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\rho^2 + g|\Psi|^2 - \mu - V\hat{p}_z - \Omega\hat{l}_z\right)\Psi. \quad (5)$$

を得る。凝縮体のダイナミクスはこの方程式によって記述される。

5 量子渦が一本ある場合の素励起

まず始めに、 z 軸に沿って量子数 1 の直線渦が一本ある場合を考えよう。このとき定常状態の巨視的波動関数は $\Psi_0 = \psi_0(\rho)e^{i\theta}$ と書くことができる。波動関数の対称性のおかげで、化学ポテンシャルを

$$\mu \equiv \mu(V, \Omega) = \mu(0, 0) - \Omega; \quad (6)$$

の様に書くことができる。したがって、 ψ_0 は V と Ω に依存しない。

ケルビン波は集団励起モード $\delta\Psi$ の一つとして表現される。波動関数を Ψ_0 と $\delta\Psi$ を用いて $\Psi = \Psi_0 + \delta\Psi$ と表そう。このとき、振動数 ω を持つ集団励起モードは、

$$\delta\Psi = e^{i\theta}[u_{k,l}(\rho)e^{i(kz+l\theta-\omega t)} - v_{k,l}^*e^{-i(kz+l\theta-\omega t)}], \quad (7)$$

と書かれ、 k と l はそれぞれ z 方向と方位角方向のモードの量子数である。ここでは、動径方向の量子数がゼロである低エネルギーモードのみを考え、規格化条件 $\int dV(u_{k,l}^*u_{k',l'} - v_{k',l'}^*v_{k,l}) = \eta\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}$ を課す。ここで $\eta > 0$ であり、 $\delta_{i,i'}$ はクロネッカーのデルタ関数である。

低エネルギーモードは方位角量子数 l によって 3 つに分類される。一つは $l = -1$ で直線渦を螺旋状に変形するケルビン波である [12]。2 つ目は $l = 0$ のモードで、渦芯沿いにその回転対称性を保ったまま伝わる密度波である。密度変化に応じて渦芯の有効半径が変化するため、その見た目から静脈瘤波 (varicose wave) とも呼ばれている [6]。残りのモード $l \neq -1, 0$ は凝縮体の外郭を伝わる表面波である。ケルビン波と表面波の典型的なものを図 1 (a) と (b) に示す。

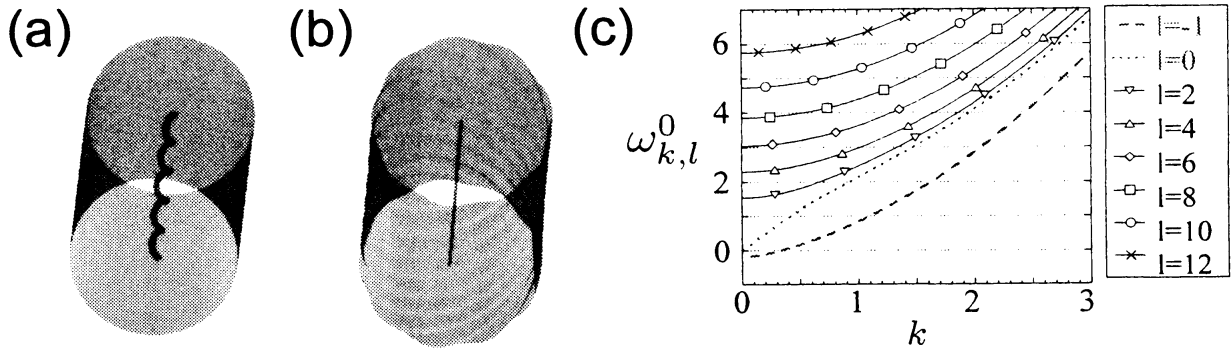


図 1 渦状態における励起状態とその分散関係. 渦が一本ある凝縮体にケルビン波 (a)、表面波 (b) が励起されたときの密度分布の等値面を表す. 式 (11) を (a) $(V, \Omega) = (1.071, 0.35)$ 、(b) $(V, \Omega) = (0.8, 0.45)$ について数値的に解いて得られた. (c) は $g_{2D} = 500$ のときの励起状態の分散関係を示しており、それぞれケルビン波 $l = -1$ (破線)、静脈瘤波 $l = 0$ (点線)、表面波 $l > 0$ (実線) である.

GP 方程式 (5) を式 (7) を用いて線形化することにより、BdG 方程式

$$(\omega + kV + l\Omega) \begin{pmatrix} u_{k,l} \\ v_{k,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_+ & -g\psi_0^2 \\ g\psi_0^{*2} & -\hat{h}_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k,l} \\ v_{k,l} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

を得る. ここで、 $\hat{h}_{\pm} = -\frac{1}{2}[(d^2/d\rho^2) + (d/\rho d\rho) - ((l \pm 1)^2/\rho^2) - k^2] + \rho^2/2 + 2g|\psi_0|^2 - \mu(0, 0)$. である. 式 (6) と同様に、環境体と一緒に運動する座標系から見たモードの振動数 ω は、

$$\omega \equiv \omega_{k,l}(V, \Omega) = \omega_{k,l}^0 - kV - l\Omega, \quad (9)$$

と書かれ、ここで $\omega_{k,l}^0 \equiv \omega_{k,l}(0, 0)$ は実験室系での振動数である. このように振動数の V と Ω の依存性を切り離すことができ、 $u_{k,l}$ と $v_{k,l}$ は V と Ω に依存しない. いくつかの l にたいして $g_{2D} \equiv g/L = 500$ の場合に GP 方程式 (5) と BdG 方程式 (8) を解いて得られた、いくつかの l についての分散関係 $\omega_{k,l}^0$ を図 1 (c) に示してある.

6 渦状態の安定性と DG 不安定性の発現条件

素励起のエネルギー量子は $\hbar\omega$ で与えられる. そのため、少なくとも一つでも負の振動数 $\omega < 0$ を持つモードが存在すれば、定常状態 Ψ_0 は熱力学

エネルギー (4) の鞍点となり不安定となる。そのとき、熱力学エネルギーを減少させるために負の振動数を持つモードが励起、増幅される。 $V = 0$ の場合の渦一本がある状態 Ψ_0 の安定性は、文献 [13] で調べられた。角振動数 Ω が下部臨界値 Ω_L よりも小さいとき、渦状態 Ψ_0 は不安定となり、渦を中心から平行移動させるモードである波数ゼロ $k = 0$ のケルビン波が励起される。渦が中心からずれることにより、凝縮体の角運動量が減少し、最後には渦なし状態に遷移する。下部臨界値 $\Omega = \Omega_L$ で $k = 0$ のケルビン波の振動数 $\omega_{0,-1} = \omega_{0,-1}^0 + \Omega$ がゼロになるので、下部臨界値は $\Omega_L = -\omega_{0,-1}^0$ で与えられる。渦状態 Ψ_0 には上部臨界角振動数 Ω_U も存在する。角振動数 Ω が臨界値 Ω_U を超えると、凝縮体の角運動量を増加させるために表面波が励起された後、凝縮体内部にいくつかの渦が浸入する。上部臨界角振動数 Ω_U は、表面波の振動数 $\omega_{0,l} = \omega_{0,l}^0 - l\Omega$ ($l > 0$) が負になる最低の角振動数であるから、 $\Omega_U = \min_l (\omega_{0,l}^0 / l)$ ($l > 0$) である。以上より、 $V = 0$ の場合、渦一本の状態 Ψ_0 は $\Omega_L < \Omega < \Omega_U$ のとき安定である。通常 $\Omega_L < \Omega_U$ が満たされているため [13]、渦一本の状態を原子気体 BEC で実現することができる。

ここで、 Ω を $\Omega_L < \Omega < \Omega_U$ の範囲に固定して V を変化させた場合を考えよう。 V を大きくしていき、ある臨界速度に達すると振動数が負 $\omega_{k,l}(V, \Omega) < 0$ のモードが出現する。角量子数 l のモードに対する臨界速度は、

$$V_l(\Omega) = \min_k \left(\frac{\omega_{k,l}^0 - l\Omega}{k} \right) = \frac{\omega_{k_l,l}^0 - l\Omega}{k_l}, \quad (10)$$

で与えられ、臨界波数 k_l を持つモードが始めに負の振動数を持つようになり、ランダウ不安定性によって励起される。とりわけ $l = -1$ に着目すると、速度 V が臨界速度 V_{-1} を超えると波数 k_{-1} のケルビン波が始めに励起される。これはケルビン波のランダウ不安定性による DG 不安定性の発現を意味している。実際、ケルビン波に対する臨界速度 V_{-1} は渦糸近似で求めた DG 不安定性の臨界速度 (3) と同じ形をしている。このようにして、DG 不安定性の臨界速度が熱力学的な議論から出発して、渦状態の励起状態を微視的に調べることにより導出された。

DG 不安定性を観測するためには、ケルビン波に対する臨界速度 V_{-1} が

他のモードに対する臨界速度 V_l ($l \neq -1$) より小さくなくてはならない. そうでなければ、速度 V を大きくしていったときに、 V が V_{-1} に達するまでに、他のモードの励起により渦状態が不安定になってしまうからである. 数値計算によって得られた分散関係 [図 1 (c)] を元に、式 (10) により得られるいくつかの l に対する臨界速度を図 2 (a) に示した. ケルビン波 ($l = -1$)

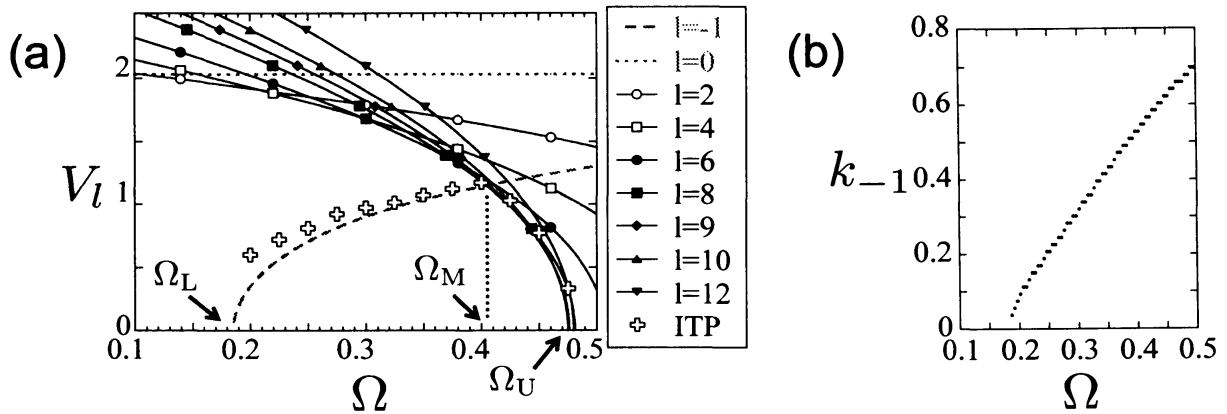


図 2 (a) 臨界速度 V_l の Ω 依存性. グラフの線は $g_{2D} = 500$ のときの BdG 方程式を数値的に解いた結果である. 破線、点線、実線は、それぞれケルビン波 ($l = -1$)、静脈瘤波 ($l = 0$)、表面波 ($l > 0$) の臨界速度 V_l に対応する. 十字架は GP 方程式の虚時間発展により得られた最低臨界速度 $V_c = \min_l(V_l)$ の数値結果である. (b) 臨界速度 $V = V_{-1}$ で励起されるケルビン波の波数 k_{-1} . 励起されるケルビン波の波数 k_{-1} を観測することにより、ケルビン波の分散関係 $\omega_{k_{-1}, -1}^0 = k_{-1}V_{-1} - \Omega$ を直接求めることができる.

の臨界速度 V_{-1} は角振動数 $\Omega = \Omega_L$ からたち上がり、 Ω と共に単調に増加する. 静脈瘤波 ($l = 0$) の臨界速度 V_0 は角振動数 Ω に依存せず、典型的にケルビン波 $l = -1$ の臨界速度 V_{-1} より小さい値をとる. これは図 1 (c) から分かる様に、静脈瘤波の分散関係が低波数側で k に関して線形的であるのに対して、ケルビン波のそれは二次関数的であるからである. 一方で、 $l > 0$ の表面波の臨界速度 $V_{l>0}$ は角振動数 Ω と共に減少する. そのため、 $\Omega = \Omega_M$ である l をもつ表面波の臨界速度とケルビン波の臨界速度が等しくなり、 $\Omega_M < \Omega < \Omega_U$ では、ケルビン波が励起されるよりも先に、表面波が励起されてしまう. ちなみに、 $l < -1$ の表面波の臨界速度 $V_{l<-1}$ は常にケルビン波の臨界速度より大きいために、不安定性に寄与しないので図 2 (a)

には示していない. 以上より、角振動数が $\Omega_L < \Omega < \Omega_M$ の範囲にあるときに DG 不安定性が発現する.

7 ケルビン波の増幅

熱力学エネルギーを減少させるために、ランダウ不安定性により励起されたケルビン波は増幅される. このような散逸ダイナミクスを記述するために、散逸定数 $\gamma > 0$ を含む GP 方程式 [14]

$$(i - \gamma) \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\frac{\nabla^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} + g|\Psi|^2 - \mu - V\hat{p}_z - \Omega\hat{l}_z \right) \Psi, \quad (11)$$

を導入する. γ の値は環境体と凝縮体の相互作用で決まる. ランダウ不安定性を引き起こし、熱力学エネルギーを減少させる環境体の役割は、外部ポテンシャルやそれによってかき回される熱成分によって果たされる [15, 14, 16]. 螺旋運動する環境体は異なる振動数をもつレーザーを z 軸沿いに対向させることにより動く光格子を作り [16]、その光源を z 軸周りに回転させればよい [15].

速度 V を大きくしていくと、 $\Omega_L < \Omega < \Omega_M$ ではケルビン波が、 $\Omega_M < \Omega < \Omega_U$ では表面波が増幅される. 図 1 の (a) と (b) は、散逸項を含む GP 方程式 (11) を数値的に解くことにより得られた、増幅されたケルビン波と表面波を示している. 表面波励起 $l > 0$ の増幅によって凝縮体表面を螺旋沿いに伝わるさざ波が現れ、後に凝縮体にいくつかの渦を浸入させる. ケルビン波励起 $l = -1$ の増幅により螺旋の半径が時間と共に大きくなる. これは、超流動ヘリウムの系における DG 不安定性の渦糸近似による解析と定性的に同じ結果を与えている. このような増幅は、ケルビン波の分散関係を観測することを可能にする. 臨界速度付近 $V \sim V_{-1}$ で増幅されるケルビン波の波数 $k \sim k_{-1}$ [Fig. 2 (b)] を実験的に観測することによって [17]、関係式 (10) を用いてケルビン波の分散関係 $\omega_{k_{-1}, -1}^0 = k_{-1}V_{-1} - \Omega$ を直接確かめることができる. したがって、DG 不安定性を利用してケルビン波の分散関係を初めて観測することが可能である.

8 複数本渦があるときの DG 不安定性

次に、量子渦が二本以上存在するときの DG 不安定性について調べてみよう。複数本渦がある場合は渦の配置が回転対称でない為に、励起状態はもはや角運動量の固有状態ではなく、上で議論したような BdG 方程式による解析はかなり複雑になってしまう。この場合、DG 不安定性の臨界速度だけを求めることを目的とするのであれば、GP 方程式 (5) の虚時間発展 (ITP) を数値的に用いた方が便利である。通常、ITP は熱力学ポテンシャル $K(V, \Omega)$ の極小を見つけるために利用されるが、ここでは以下に示す一連の過程の中で用いられる。一番目の過程として、ITP で Ω をある有限の値に固定しかつ $V = 0$ として渦が $n_v (> 1)$ 本ある状態を求める。ここで渦の本数が異なる状態は、それぞれ Ω の値がある範囲にあるときに安定に存在する。二番目の過程では、 V を少し大きくしたと同時に小さいランダムノイズを加えた状態を初期状態として、ITP で再び安定状態を求める。もし最初と同じ渦状態が保たれたならば二番目の過程を繰り返す。しかし、もし同じ渦状態が回復しなければ、その時点での V の値を臨界速度 V_c とする。BdG 方程式の計算による結果と比較するために、渦が一本ある状態における V_c の ITP による結果を図 2 (a) に加えた。ここで、 V_c は渦状態が安定に存在するための臨界速度であり、渦が一本ある状態の場合は $V_c = \min_l(V_l)$ と書かれる。両者の結果はお互いに矛盾しておらず、ITP による数値計算の結果が信頼できることを示している。

我々は、相互作用定数 $g_{2D} = 500$ を固定して、渦の本数が $n_v = 2, 3, 4$ であるときの臨界速度 V_c が、角振動数 Ω にどのように依存するかを数値的に調べた (図 3)。渦が複数本ある場合 ($n_v = 2, 3, 4$) でも、臨界速度 V_c は渦が一本ある場合 $n_v = 1$ のそれと定性的に同様な振る舞いをする。ケルビン波励起と表面波励起に対する臨界速度が、図 3 における V_c のピークで交差する。実際、 V_c のピークの両サイドでケルビン波と表面波がそれぞれ増幅される (図 3 の挿絵) ことが数値計算により確かめられる。表面波の臨界速度は、渦の本数 n_v と共に小さくなっている。これは、 Ω の値を固定したとき、より多く渦を持った状態の方が凝縮体の角運動量を減少させるのが容

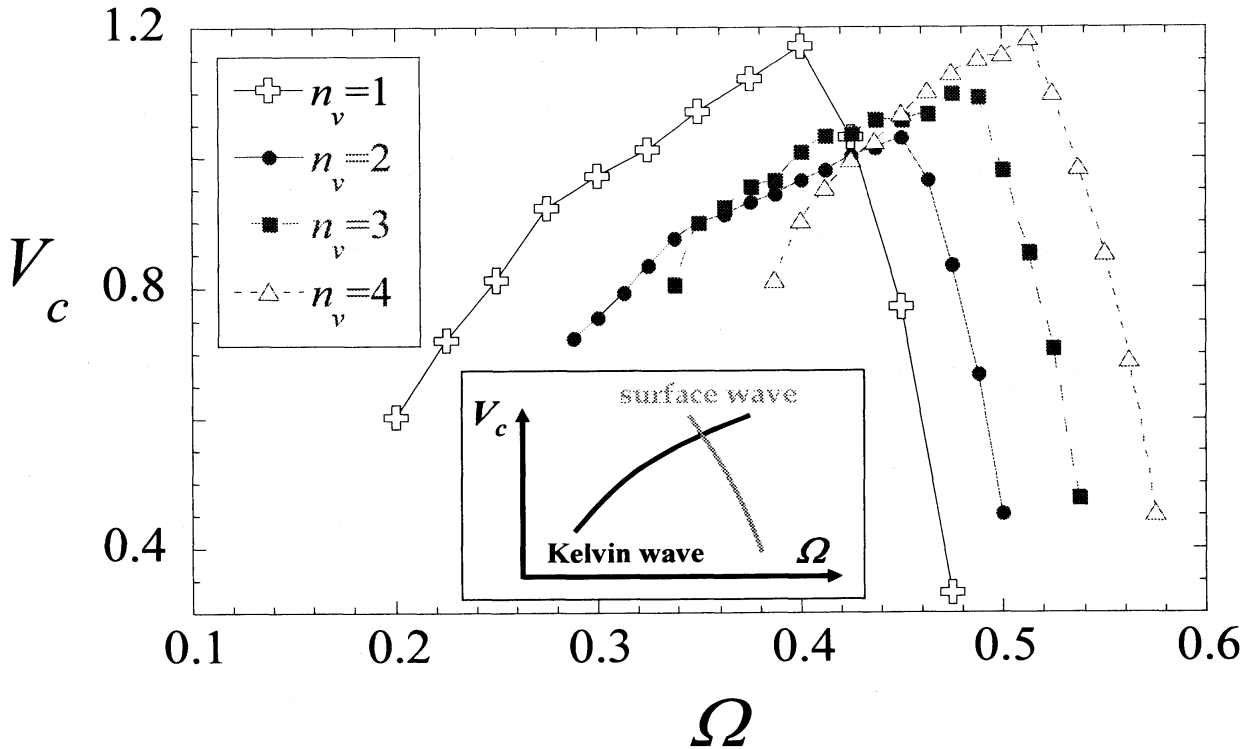


図3 凝縮体中に渦が $n_v (= 1, 2, 3, 4)$ 本ある状態における最低臨界速度 $V_c(\Omega)$. $g_{2D} = 500$ の場合の GP 方程式の虚時間発展により数値的に得られた結果である. ケルビン波と表面波の臨界速度はグラフの頂点で交差する (挿絵参照). したがって、グラフ上の頂点の左側でケルビン波が、右側で表面波がそれぞれ励起される.

易であるからである. 一方、ケルビン波の臨界速度に関しては、 $n_v = 1$ の状態と $n_v = 2, 3, 4$ の状態の間に定量的な違いが現れている. これは、以下の様に説明される. 渦が一本ある状態におけるケルビン波励起は渦芯付近の密度分布を局所的に変動させるだけである. したがって、ケルビン波励起の分散関係 $\omega_{k,-1}^0$ はバルクエネルギー $g|\Psi(\mathbf{r})|^2$ (渦芯付近における局所的な相互作用エネルギー) に強く影響される. 波数 $k = 0$ のケルビン波の振動数 $\omega_{0,-1} = -\Omega_L$ は g_{2D} と共に増加し [13]、バルクエネルギーも典型的に g_{2D} と共に増加することを考慮すると、ケルビン波励起に対する臨界速度はバルクエネルギーと共に増加するといえる. このような議論は、渦間距離が十分大きく、それらの間の相互作用が無視できるような渦の本数が少ない状態にも当てはまる. 渦が一本ある状態 $n_v = 1$ においては渦が中心

に配置しているのに対して、渦が複数本ある状態 $n_v = 2, 3, 4$ では渦は中心からずれた位置に配置している。バルクエネルギー $g|\Psi(\mathbf{r})|^2$ は、中心から離れるほど小さくなるので、 $n_v = 1$ 状態におけるケルビン波励起に対する臨界速度は、複数本渦がある状態におけるそれに比べ幾分大きい値をとる。 $n_v = 2, 3, 4$ それぞれの状態におけるケルビン波励起の臨界速度が互いに近い値をとるのは、バルクエネルギーにそれほど違いがないからである。

9 量子渦の再結合

ケルビン波が増幅されて大きくなった螺旋半径が隣接する渦間距離程度になると、渦間の相互作用による非線形効果が顕著に効いてくる。図 4 は、式 (11) を数値的に解くことによって得られた、渦が二本ある状態における DG 不安定性のダイナミクスを示している。ケルビン波の増幅 [図 4 (a,b)] は渦の再結合 [図 4 (c-e)] を引き起こす。再結合の後も、渦上のケルビン波は増幅を続け [Fig. 4 (f)]、複雑なダイナミクスを生む。このように、原子気体 BEC では DG 不安定性を利用して量子渦の再結合を操作することができる。これを利用して、非圧縮性超流体と見なされる超流動ヘリウムでは非常に困難である量子渦の再結合後の音波放出の研究 [7] が、圧縮性超流体である原子気体 BEC において可能である。

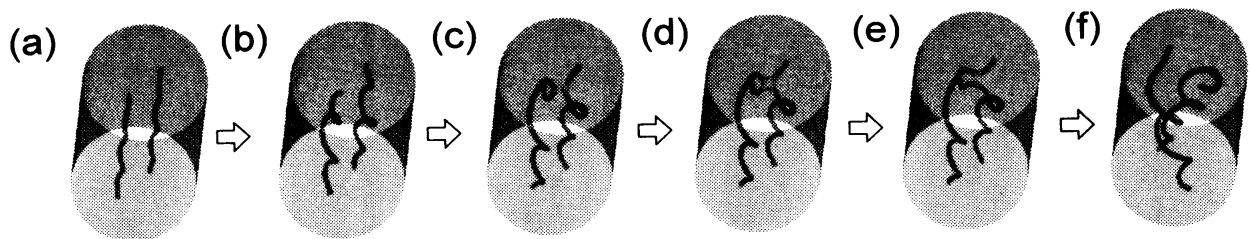


図 4 渦が二本ある状態における DG 不安定性による非線形ダイナミクス。ケルビン波が増幅された (a,b) 後、渦の再結合が起こり (c,d,e)、複雑なダイナミクスへと発展する (f)。パラメータは $g_{2D} = 500$ 、 $L = 62.2768$ 、 $\Omega = 0.35$ 、 $V = 1.00$ 、 $\gamma = 0.05$ である。それぞれの時間は (a) $t = 0$ 、(b) 147.96, (c) 179.52, (d) 181.50, (e) 182.48, and (f) 241.67 である。

9.1 渦格子から渦タングルへの遷移

初期状態でたくさんの渦が存在する場合、再結合が頻繁に起こることが予測される。このとき、強い非線形効果により渦のダイナミクスはかなり複雑になる。超流動ヘリウムで議論されているように [10]、渦格子状態において DG 不安定性が起こると、量子渦のタングル状態、すなわち量子乱流へと遷移する。同様なシナリオが原子気体 BEC でも期待される。実際、渦格子状態からタングル状態への発展する様子を数値的に確かめた (図 5)。渦格子状態 [図 5 (a)] から出発して、DG 不安定性により各々の量子渦上でケルビン波が増幅された後 [Fig. 5 (a-c)]、渦の再結合が頻繁に起きて [図 5 (d)]、量子渦が複雑に絡み合ったタングル状態へと移行する [図 5 (e)]。このようにして、DG 不安定性は原子気体 BEC において量子乱流を実現する一つの可能性を与える [18]。

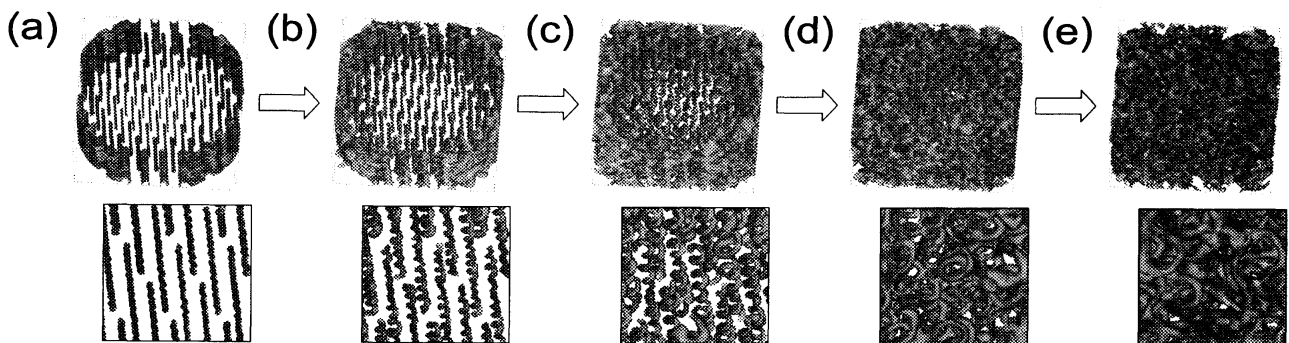


図 5 原子気体 BEC における DG 不安定性による渦格子状態から量子渦タングル状態への遷移。下図はそれぞれの時間における凝縮体中央部の拡大図を表している。ケルビン波が渦格子の各々の渦で励起、増幅され (a-c)、量子渦の再結合が頻繁に起こる (d)。その後、量子渦が複雑に絡み合った量子渦タングル状態に発展する (e)。パラメータは $g_{2D} = 9000$ 、 $L = 10.02$ 、 $\Omega = 0.8$ 、 $V = 6.95$ 、 $\gamma = 0.05$ である。時間はそれぞれ (a) $t = 0$ 、(b) 1.02、(c) 1.53、(d) 2.04、(e) 2.55 である。

10 結論

この研究では、渦状態の原子気体 BEC において、螺旋運動する環境体に対する超流動の安定性を議論した。環境体の角振動数に依存してケルビン波励起や表面波励起に対するランダウ不安定性が引き起こされる。前者の不安定性は、ケルビン波の増幅の引き金となり、この現象は超流動ヘリウムで知られる DG 不安定性に対応する。DG 不安定性は凝縮体に渦が複数本ある場合でも発現し、これを利用して渦の再結合や量子乱流を実現できることを示した。

謝辞

本研究の共同研究者である近畿大学理工学部の笠松健一氏、大阪市立大学理学研究科の坪田誠氏に感謝します。

参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 5, third ed., part 1 (Pergamon, New York, 1980).
- [2] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [3] Hiromitsu Takeuchi, Kenichi Kasamatsu, and Makoto Tsubota, *Phys. Rev. A* **79**, 033619 (2009).
- [4] W. Thomson, *Phil Mag.* **10**, 155(1880).
- [5] W. I. Glaberson, W.W. Johnson, and R.M. Ostermeier, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1197 (1974).
- [6] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, 1991).
- [7] S. Ogawa, M. Tsubota, and Y. Hattori, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, 813

(2002).

- [8] Prog. Low Temp. Phys., ed. W. P. Halperin and M. Tsubota (Elsevier, Amsterdam, 2008) Vol. 16.
- [9] M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 111006 (2008).
- [10] M. Tsubota, T. Araki, and C. F. Barengi, Phys. Rev. Lett. **90**, 205301 (2003).
- [11] A. P. Finne, V. B. Eltsov, G. Eska, R. Hänninen, J. Kopu, M. Krusius, E.V. Thuneberg, and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **96**, 085301 (2006).
- [12] L. P. Pitaevskii, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)].
- [13] T. Isoshima and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 487 (1999).
- [14] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A **67**, 033610 (2003).
- [15] C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels, K. Xu, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 210402 (2001).
- [16] D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **99**, 070402 (2007).
- [17] V. Bretin, P. Rosenbusch, F. Chevy, G. V. Shlyapnikov, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **90**, 100403 (2003).
- [18] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. A **76**, 045603 (2007).